O Teorema de Van der Waerden

Leandro Cioletti *

12 de abril de 2012

Resumo

Nestas notas apresentamos a prova do Teorema de Van der Waerden. Este teorema diz que para qualquer coloração do conjunto dos números naturais com duas cores sempre é possível encontrar uma progressão aritmética monocromática de comprimento arbitrariamente grande.

Estas notas são de caráter expositório, baseadas em resultados clássicos da Combinatória extremal e não possui nenhum conteúdo original.

AMS 2000 subject classification: 05DXX, 05D10, 05C15.

Palavras-chaves: Teoria de Ramsey, Coloração, Teorema de Van der Waerden.

1 Introdução

O objetivo destas notas é apresentar de maneira razoavelmente detalhada e auto-contida a prova do Teorema de Van der Waerden. Este resultado foi obtido em 1927 e teve um papel importante no desenvolvimento de várias áreas da matemática, incluindo combinatória extremal, combinatória aditiva e a teoria ergódica. Grandes avanços no estudo de progressões aritméticas em subconjuntos de $\mathbb{N}$ foram obtidos em seguida. Entre estes avanços destacamos o Teorema de Szemerédi (1975), que prova uma conjectura de Erdös e Turan de 1936 sobre a existência de progressões aritméticas arbitrariamente longas em qualquer subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ de densidade superior positiva. Outro resultado notável nesta direção foi obtido recentemente, em 2008, por Benjamin Green e Terence Tao. Eles mostraram que existem progressões aritméticas de comprimento arbitrariamente longo no conjunto dos números primos. De fato, o teorema de Green e Tao é muito mais forte. Ele mostra que em qualquer subconjunto dos primos com densidade (relativa) positiva podemos encontrar também progressões aritméticas de comprimento arbitrariamente longos.

Uma das mais famosas conjecturas de Paul Erdös afirma que se $X \subset \mathbb{N}$ é tal que

$$\sum_{n \in X} \frac{1}{n} = +\infty$$

*Departamento de Matemática, UnB, 70910-900 Brasília, Brasil.
leandro.mat@gmail.com

então X necessariamente contém progressões aritméticas de comprimento arbitrariamente longos. Note que a resposta afirmativa para esta questão teria como consequência imediata o Teorema de Green e Tao. Este problema permanece em aberto mesmo para progressões aritméticas de comprimento 3.

2 Notação

Os resultados apresentados aqui estão relacionados a progressões aritméticas em subconjuntos dos naturais, por isto começamos introduzindo as seguintes notações: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $[n] = \{1, \ldots, n\}$. A cardinalidade de um conjunto X qualquer será denotada por $|X|$.

Uma coloração de um conjunto X não-vazio com $r \in \mathbb{N}$ cores será apenas uma maneira de nos referir a uma função $c : X \to [r]$. Neste contexto os números $\{1, \ldots, r\}$ serão chamados de cores e diremos que $x \in X$ está pintado com a cor $i \in [r]$ se $c(x) = i$. Um conjunto monocromático é um subconjunto $M \subset X$ cujo os elementos são todos pintados com a mesma cor.

Uma progressão aritmética de comprimento k é um subconjunto de $\mathbb{N}$ da forma,

$$\{a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (k - 1)d\}$$

onde $a, d, k \in \mathbb{N}$. Para nos referirmos a progressão aritmética acima, usaremos a notação $\mathrm{PA}(a, d, k)$.

Com toda notação introduzida, podemos enunciar de maneira precisa o resultado mais importante destas notas.

Teorema 1 (Van der Waerden, 1927)**.** *Para qualquer $c : \mathbb{N} \to [2]$, sempre é possível encontrar progressões aritméticas monocromáticas arbitrariamente grandes.*

A intenção é apresentar uma prova deste teorema por indução. Mas enunciado com esta generalidade nossa hipótese de indução é muito fraca.

Ideia principal: Fortalecer a hipótese de indução ! Vamos mostrar que o mesmo resultado é válido para um número arbitrário de cores. Esta ideia é fruto da observação que em diversos casos é mais fácil aplicar o princípio da indução para provar resultados mais gerais do que casos particulares.

Prova do teorema. Para cada par $k, r \in \mathbb{N}$, defina $W(r, k)$ sendo o menor inteiro $n \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer coloração de $[n]$ em r cores, existe pelo menos uma progressão aritmética monocromática de comprimento k em $[n]$. Afirmamos que $W(r, k)$ existe para qualquer par $r, k \in \mathbb{N}$ e vamos provar este fato por meio de uma dupla indução.

Observe que a afirmação é verdadeira se $k \leq 2$, para qualquer $r \in \mathbb{N}$. Se $k = 1$ esta afirmação é claramente verdadeira. Se $k = 2$ tomando $n = r + 1$, podemos verificar que esta afirmação é verdadeira, considerando dois casos. Primeiro caso: se todos os elementos de $[r]$ são pintados com cores distintas então pelo principio de Dirichlet $c(r + 1) = c(j)$ para algum $j \in [r]$ e este dois elementos formam uma progressão aritmética monocromática de comprimento 2. Caso contrário existem dois elementos pintados com a mesma cor em $[r]$ e assim a afirmação esta provada.

O argumento acima assegura a existência de $W(r,1)$ e $W(r,2)$ para todo $r \in \mathbb{N}$. Para dar uma ideia geométrica de como será nossa indução, note que podemos dizer que a afirmação é verdadeira para as duas primeiras linhas infinitas do reticulado $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Nossa hipótese de indução será que $W(r, k-1)$ existe para todo $r \in \mathbb{N}$.

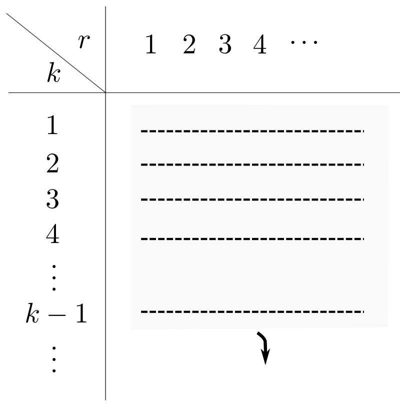

Figura 1: Hipótese de Indução

Sejam $A_1, \ldots, A_t$ progressões aritméticas de comprimento l, onde cada progressão $A_j = PA(a_j, d_j, l)$. Dizemos que esta progressões são *focadas* em $z \in \mathbb{N}$ se

$$a_i + l d_i = z = a_j + l d_j,$$

para todo $i, j \in [t]$. Observe que pela definição de $PA(a,d,k)$ se as progressões $A_1, \ldots, A_t$ são focadas em z, então z não pertence a nenhuma destas progressões.

Dizemos que t progressões aritméticas $A_1, \ldots, A_t$, de mesmo comprimento, como acima, são *coloridamente focadas* em z, se elas são focadas em z e monocromáticas de cores distintas, veja figura abaixo:

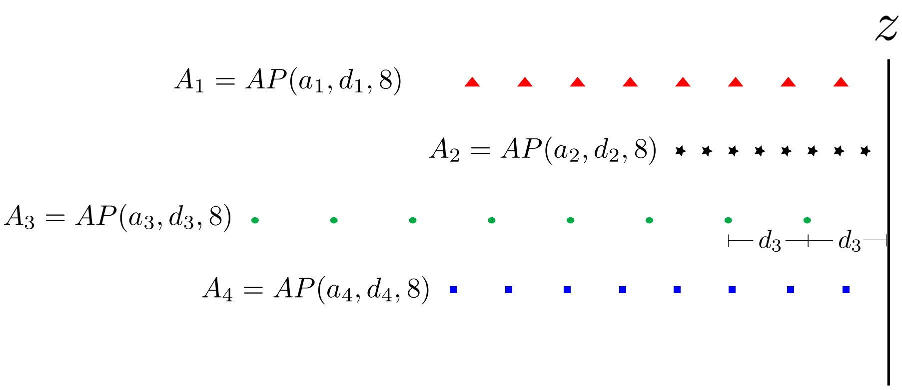

Figura 2: Exemplo de 4 progressões aritméticas de comprimento 8, coloridamente focadas em z.

Afirmação: Sejam $k, r \in \mathbb{N}$ arbitrários. Para todo $s \leq r$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda coloração de $[n]$ com r cores ou existe em $[n]$ uma progressão aritmética de comprimento k ou s progressões aritméticas de comprimento $k-1$ coloridamente focadas em algum número z.

Prova da Afirmação. A prova será feita por indução em s. Note que se $s = 1$ então, segue da hipótese de indução principal que existe $W(r, k-1)$ e portanto basta tomar $n \geq W(r, k-1)$.

Vamos supor que $s > 1$ e que n é o número desejado para $s-1$. Vamos mostrar que $N = 2n \cdot W(r^{2n}, k-1)$ é o número desejado para s.

Primeiro consideramos uma partição de $[N]$ em blocos de comprimento $2n$. Note que cada um destes blocos ou contém uma progressão aritmética monocromática de comprimento k (e neste caso não há nada a fazer), ou cada um dos blocos possui $s-1$ progressões aritméticas coloridamente focadas de comprimento $k-1$ e além dos mais os focos em cada bloco tem cores distintas das $s-1$ progressões monocromáticas focadas nele. Este fato é consequência direta da segunda hipótese de indução.

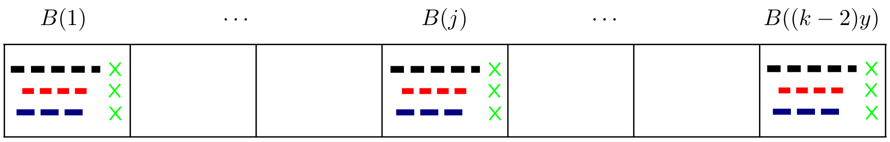

Figura 3: Blocos de P.A.'s coloridamente focadas.

Próximo passo é observar que uma coloração de $[N]$ em r cores induz uma coloração no conjunto de blocos em r^{2n} cores. Mas já que $N = 2n \cdot W(r^{2n}, k-1)$, existe uma progressão aritmética monocromática, obtida a partir da enumeração dos blocos e de sua r^{2n} coloração, que denotaremos por

$$\mathscr{B} = \{B(x), B(x+y), \ldots, B(x+(k-2)y)\}.$$

Seja $A_j = PA(a_j, d_j, k-1)$ para $1 \leq j \leq s-1$ as $s-1$, progressões coloridamente focadas contidas no bloco no $B(x)$. Denote por z o foco destas sequências. O último passo é construir novas progressões aritméticas usando o primeiro termo de cada uma das progressão aritméticas coloridamente focadas de mesma cor que se encontram em cada um dos blocos da coleção $\mathscr{B}$, bem como os focos de cada bloco. Mais precisamente, as seguintes s progressões aritméticas de comprimento $k-1$ são coloridamente focadas em $z + 2ny(k-1)$:

$$C_j = PA(a_j, d_j + 2ny, k-1),$$

para $1 \leq j \leq s-1$ e $PA(z, 2ny, k-1)$. Com esta construção completamos a prova da afirmação.

A prova do teorema segue diretamente da afirmação tomando $s = r$. $\square$

Referências

[1] R. Morris and R. Imbuzeiro: Extremal and Probabilistic Combinatorics. SBM. 28º CBM, (2011).

[2] T. Gowers: A new proof of Szemerédi's theorem for arithmetic progressions of length four. Geom. Funct. Anal. 8, 529-551 (1998).

[3] B. Green and T. Tao: The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. Ann. Math. 167, 481-547 (2008).